Eksamens set B

Opgave 1 (10%)

1.a
Figur 1 afbilleder Fourier transformationen $\left|X(e^{j\omega})\right|$ af et diskret tidssignal x[n] som er samplet ved 200 samples per sekund. x[n] bruges som input til et LTI filter med en frekvens amplitude respons $\left|H(e^{j\omega})\right|$ som vist på figur 2. Figur 3 viser Fourier transformationen af 4 forskellige signaler.

Hvilket af de 4 signaler (y_1[n], y_2[n], y_3[n] eller y_4[n]) som ses på figur 3 kan være et output fra filteret i figur 2, hvor x[n] fra figur 1 var inputtet?

Begrund dit svar, ubegrundede svar tæller ikke.

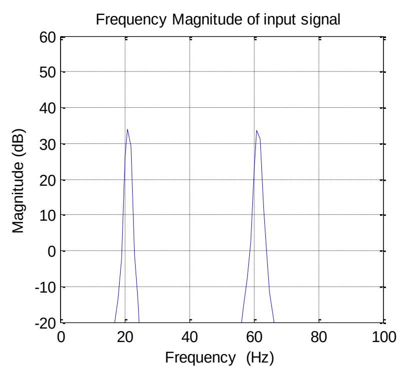

Fig. 1 Spektrum af input signalet *<u>(OBS bemærk Y aksen er i dB)</u>*

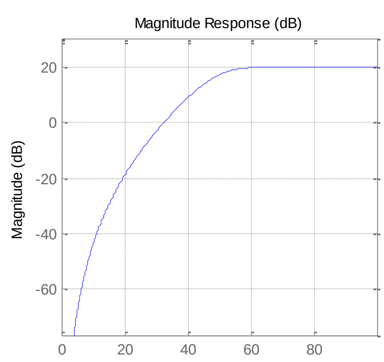

Fig. 2 Filters frekvens amplitude respons *<u>(OBS bemærk Y aksen er i dB)</u>*

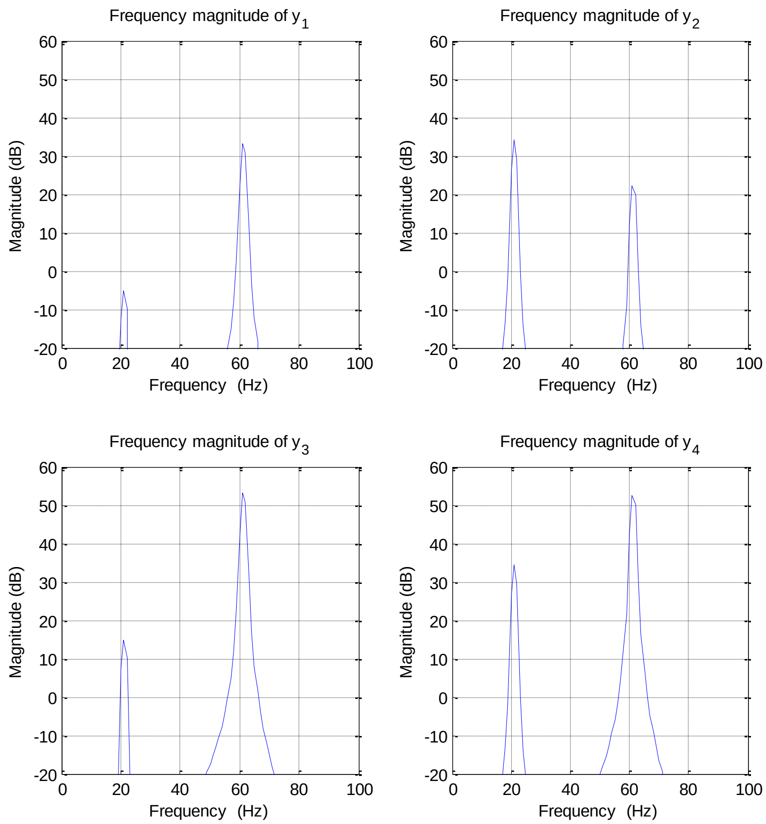

Fig. 3 Fourier transformationer af de fire mulige output signaler. ***(OBS bemærk Y akserne er i dB)***

Løsning.

y3 da filteret dæmper med 20 dB ved 20 Hz og forstærker med 20 dB ved 60 Hz.

Opgave 2 (20%)

Et LTI system har en impulsrespons beskrevet ved

$$h[n] = -\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]$$

2.a Er systemet kausalt?

Ja impulsresponsen har ingen negative indekser, altså $n \geq 0$

2.b Find H(z) og plot poler, nulpunkter og ROC for LTI systemet

Ved tabel opslag fås

$$H(z) = \frac{-1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{1}{1 - \frac{3}{4}z^{-1}}$$

$$\downarrow$$

$$H(z) = \frac{-1\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}\right)} + \frac{1\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

$$\downarrow$$

$$H(z) = \frac{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)-\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}\right)}$$

$$\downarrow$$

$$H(z) = \frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}\right)}$$

Polerne er derfor z=1/4 og z=3/4
Der er et nulpunktet ved z=0

da systemet er kausalt går ROC fra den største pol.

2.c. Er systemet stabilt?

Ja polerne ligger indenfor enhedscirkelen

2.d Find tidsdomæne differentialfunktionen for systemet. *Altså output-input relationen (a y[n]+…=b x[n]+……)*

$$H(z) = \frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}\right)}$$

$$\downarrow$$

$$H(z) = \frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{1-z^{-1}+\frac{3}{16}z^{-2}}$$

Da $Y(z) = H(z)X(z)$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{1-z^{-1}+\frac{3}{16}z^{-2}}$$

$$\downarrow$$

$$Y(z)\left(1-z^{-1}+\frac{3}{16}z^{-2}\right) = X(z)\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)$$

$$Y(z) - z^{-1}Y(z) + \frac{3}{16}z^{-2}Y(z) = \frac{1}{2}z^{-1}X(z)$$

$$\downarrow \mathit{Invers\ Z\ transformation\ ved\ tabel\ opslag}$$

$$y[n] - y[n-1] + \frac{3}{16}y[n-2] = \frac{1}{2}x[n-1]$$

Opgave 3 (15%)

Et LTI system har en impulsrespons beskrevet ved

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Et input til systemet er en step funktion

$$x[n] = u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

3.a Find outputtet på Y(z) form?

Ved tabel opslag fås

$$X(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})} \qquad H(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

Da $Y(z) = H(z)X(z)$ fås

$$Y(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)(1 - z^{-1})}$$

3.b Find en funktion for outputtet på y[n] form?

For at kunne udføre en invers z-transformation af H(z) ved hjælp af tabelopslag bruger vi partialbrøksopspaltning.

$$Y(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)(1 - z^{-1})} = \frac{A}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} + \frac{B}{(1 - z^{-1})}$$

Multiplicer med $(1 - z^{-1})$ på begge sider

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} = \frac{A(1 - z^{-1})}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} + B$$

Sæt z=1

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)} = 2 = B$$

Multiplicer med $\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)$ på begge sider

$$\frac{1}{(1 - z^{-1})} = A + \frac{B\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}{(1 - z^{-1})}$$

Sæt z=½

$$\frac{1}{(1 - 2)} = -1 = A$$

Derved bliver

$$Y(z) = \frac{-1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} + \frac{2}{(1 - z^{-1})}$$

Ved tabel opslag fås at

$$y[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 2\,u[n]$$