Eksamenssæt A 2009

Opgave 1 (10%)

1.a Et diskret optaget EKG signal filtreres med et LTI filter for at reduceres støjen. Det ufiltrerede signal x[n] og det filtrerede signal y[n] ses i tidsdomænet på figur 1. Figur 2 afbilleder det ufiltrerede signal og det filtrerede signal i frekvensdomænet. Figur 3 viser frekvens amplitude responsen og group delay fra fire LTI filtre. Hvilket af de fire filter a,b,c eller d er benyttet til at filtrere x[n] når outputtet blev y[n]?

Begrund dit svar, ubegrundede svar tæller ikke.

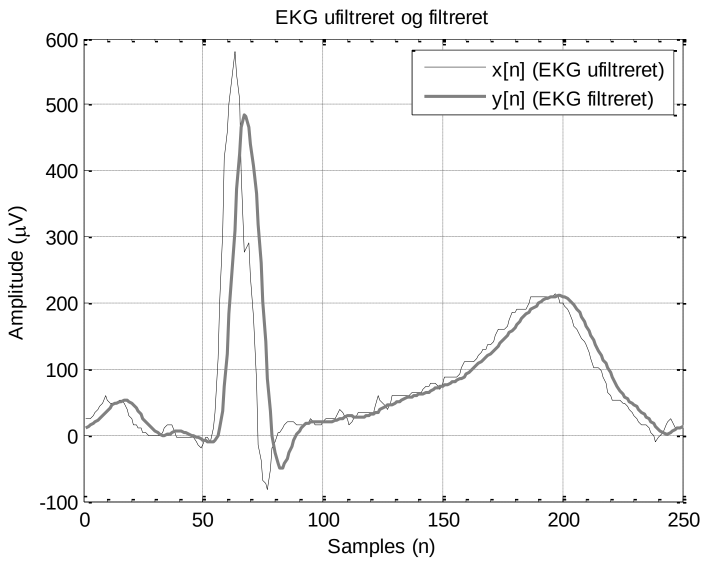


Fig. 1 EKG ufilteret og filteret

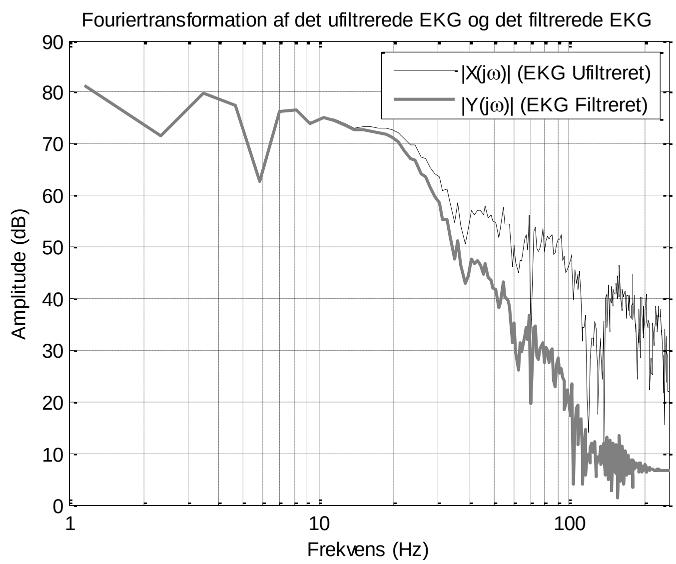


Fig. 2 Fouriertransformation af det ufiltrerede EKG og det filtrerede EKG ***(OBS bemærk Y aksen er i dB)***

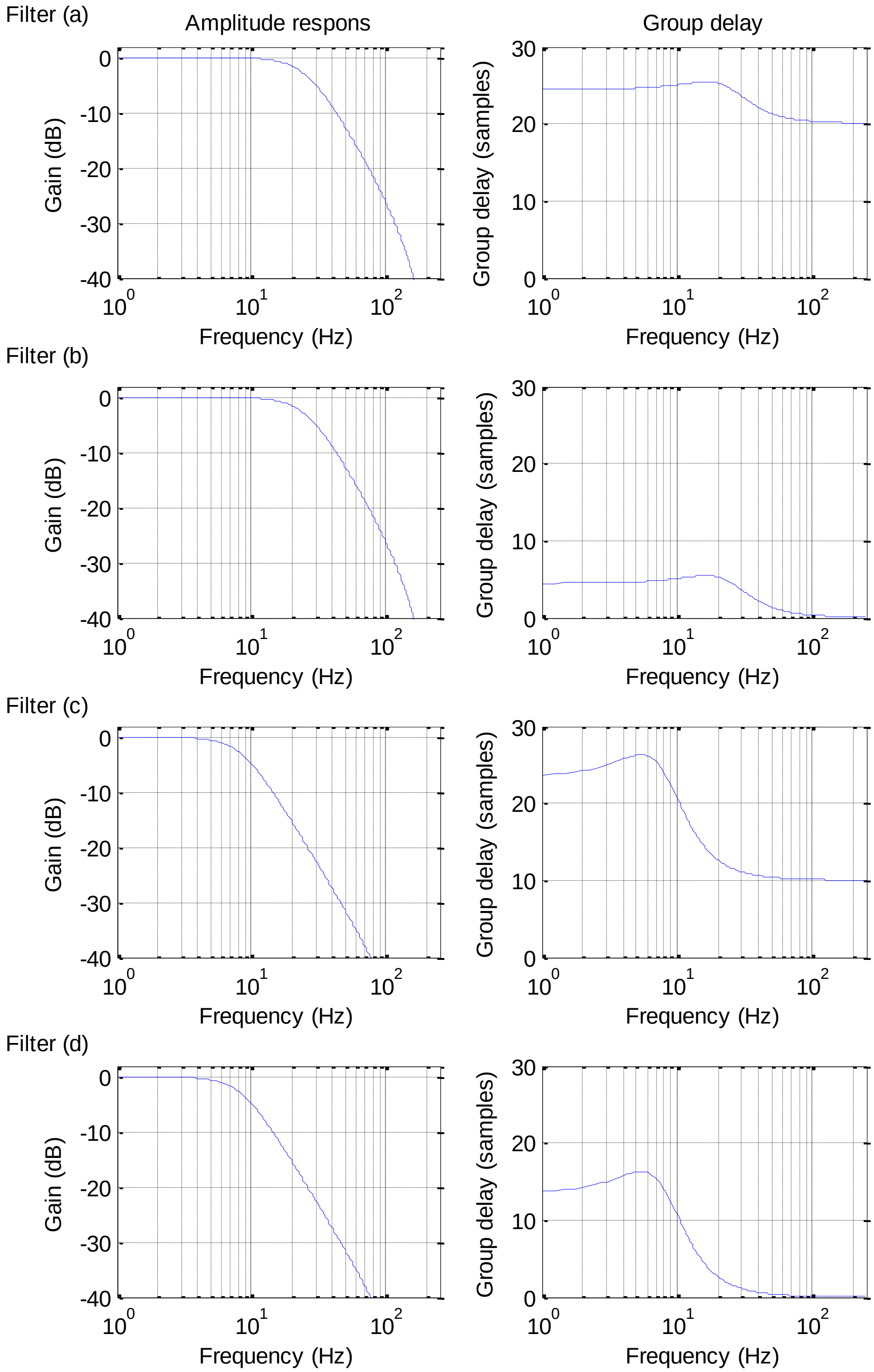


Fig. 3 frekvens amplitude responsen og group delay af fire filtre. ***(OBS bemærk Y akserne er i dB)***

Opgave 2 (15%)

Et LTI system har en impulsrespons beskrevet ved:

$$h[n] = -\left(\frac{3}{8}\right)^n \ u[n]$$

2.a Er systemet kausalt og stabilt?

Systemet er kausalt da impulsresponsen er højresiddet og stabilt fordi impulsresponsen konvergere og derfor er absolut summérbart

Et output fra systemet er defineret ved:

$$y[n] = \frac{3}{5}\left(\frac{3}{8}\right)^n \ u[n] - \frac{8}{5} \ u[n]$$

2.b Find z transformationen H(z) af impulsresponsen og z transformationen Y(z) af outputtet

Da h[n] og y[n] er højre siddet er ROC |z|>|a|

$$H(z) = \frac{-1}{1 - \frac{3}{8}z^{-1}}$$

$$Y(z) = \frac{\frac{3}{5}}{1 - \frac{3}{8}z^{-1}} - \frac{\frac{8}{5}}{1 - z^{-1}} = \frac{\frac{3}{5}(1 - z^{-1}) - \frac{8}{5}\left(1 - \frac{3}{8}z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{3}{8}z^{-1}\right)(1 - z^{-1})} = \frac{-1}{\left(1 - \frac{3}{8}z^{-1}\right)(1 - z^{-1})}$$

2.c Hvad var inputtet x[n] til systemet når outputtet var y[n]?

$$X(z) = \frac{\frac{-1}{\left(1-\frac{3}{8}z^{-1}\right)(1-z^{-1})}}{\frac{-1}{1-\frac{3}{8}z^{-1}}} = \frac{-1\left(-\left(1-\frac{3}{8}z^{-1}\right)\right)}{\left(1-\frac{3}{8}z^{-1}\right)(1-z^{-1})} = \frac{1}{(1-z^{-1})}$$

$x[n] = u[n]$ (en step funktion)

Opgave 3 (15%)

Input output relation er for et kausalt LTI system angivet ved følgende differensligning

$$y[n] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-1] - \frac{1}{20}y[n-1] + \frac{1}{20}y[n-2]$$

3.a Bestem overførselsfunktionen H(z)

$$y[n] + \frac{1}{20}y[n-1] - \frac{1}{20}y[n-2] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-1]$$

$$Y(z)\left(1 + \frac{1}{20}z^{-1} - \frac{1}{20}z^{-2}\right) = X(z)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{\left(1+\frac{1}{20}z^{-1}-\frac{1}{20}z^{-2}\right)} = H(z)$$

Løsning af anden grads polynomia

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$r = b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

3.b Find og skitser poler, nulpunkter og konvergensområdet

Beregning af rødder

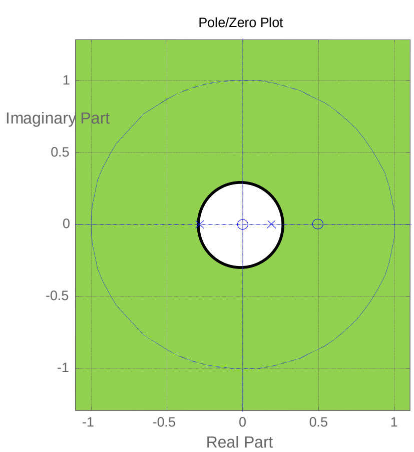
$$k = z^{-1}: \qquad \left(1 + \frac{1}{20}k - \frac{1}{20}k^2\right) = 0 \;\; dermed\ er\ rødderne\ til\ k: k = -1/4\ og\ k = 1/5$$

$$rødder\ til\ z:\ z = -\frac{1}{4}\ og\ z = \frac{1}{5}$$

$$H(z) = \frac{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}{\left(1 + \frac{1}{20}z^{-1} - \frac{1}{20}z^{-2}\right)} = \frac{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}{\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{5}z^{-1}\right)}$$

Nulpunkt er z=½

system er kausalt og derfor er funktionen højre siddet, hvilket medfører at ROC >|1/4|



3.c Er systemet stabilt?

Ja enheds cirklen ligger i ROC

3.d Bestem systemets impuls respons h[n]

$$H(z) = \frac{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}{\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{5}z^{-1}\right)} = \frac{A}{\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1}\right)} + \frac{B}{\left(1 - \frac{1}{5}z^{-1}\right)}$$

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}{\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1}\right)} = \frac{A\left(1 - \frac{1}{5}z^{-1}\right)}{\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1}\right)} + B$$

z=1/5

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}\right)}{\left(1 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}\right)} = -\frac{2}{3} = B$$

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{5}z^{-1}\right)} = A + \frac{B\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{5}z^{-1}\right)}$$

z=-1/4

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^{-1}\right)} = \frac{5}{3} = A$$

$$H(z) = \frac{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}{\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{5}z^{-1}\right)} = \frac{\frac{5}{3}}{\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1}\right)} + \frac{-\frac{2}{3}}{\left(1 - \frac{1}{5}z^{-1}\right)}$$

$$h[n] = \frac{5}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n} u[n] - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^{n} u[n]$$