Opgave 1. (15%)

1.a. Figur 1 og 2 afbilleder et diskret tid signal x[n] og dets DTFT. x[n] bruges som input til et LTI filter med en frekvens amplitude respons $|H(e^{j\omega})|$ som vist på figur 3.

Hvilket af de 4 output signaler (y_1[n], y_2[n], y_3[n] eller y_4[n]) som ses på figur 4 kan være et output fra filteret i figur 3, hvor x[n] fra figur 1 var input?
Begrund dit svar, ubegrundede svar tæller ikke.

Figur 2, fordi filteret ikke dæmper den hurtigsvingende del af signalet og dæmper den langsomsvingende del med ca. 8 dB (svarer til at gange med ca. 0.4 da $10^{(-8/20)} = 0.3981$)

1.b. Figur 5 viser 3 forskellige pol/nulpunkts plots, hvilket af disse kan til høre filteret $|H(e^{j\omega})|$ fra figur 3?
Begrund dit svar, ubegrundede svar tæller ikke.

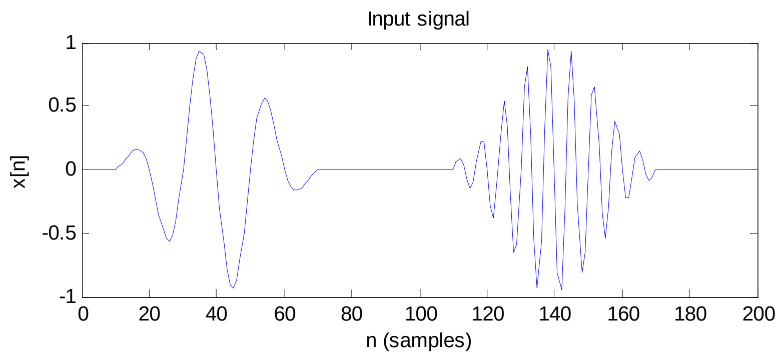


Fig. 1. Input signal

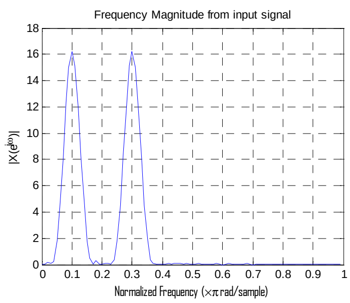


Fig. 2 Spektrum af input signalet

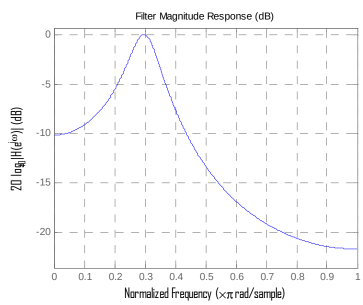


Fig. 3 Filter frekvens respons amplitude
(OBS bemærk Y aksen er i dB)

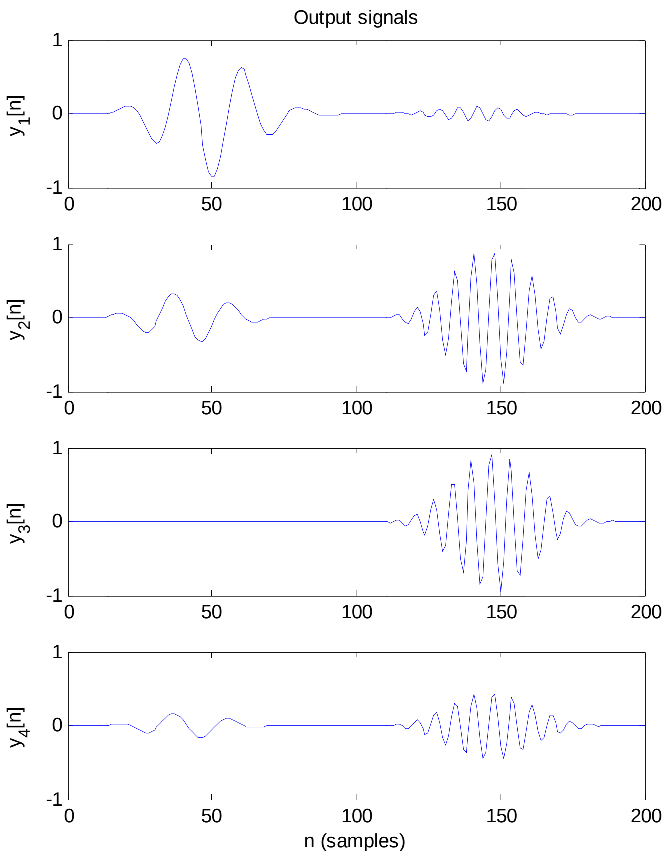


Fig. 4 Fire mulige output signaler

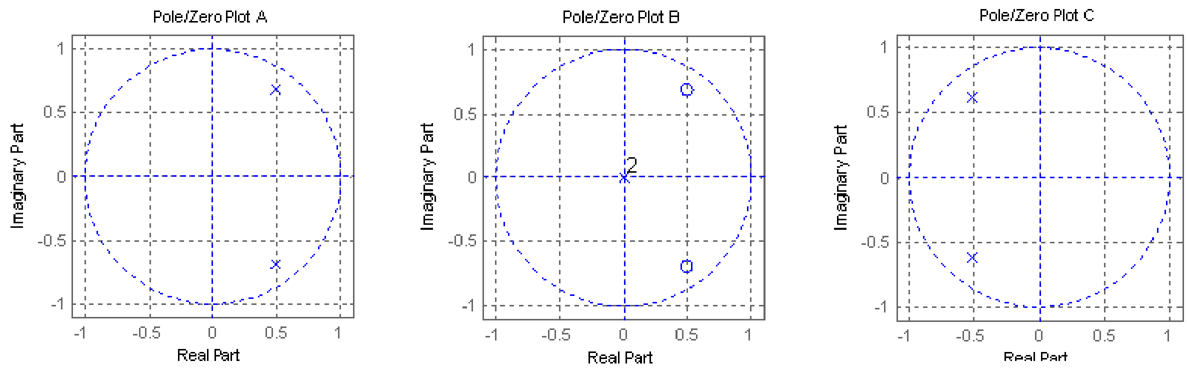


Fig. 5. Hvilket pol-nulpunkt plot tilhøre filteret på fig.3?

Da poler forsager peaks (og nul punkter forsager dale) i fourierspektret, har filteret udelukkende poler i z-planet. Da peaken på fig. 3 ligger ved 0.3π er vinklen i forhold i z-planet 0.3π i forhold til den positive reelle akse derfor er plot 1 løsningen.

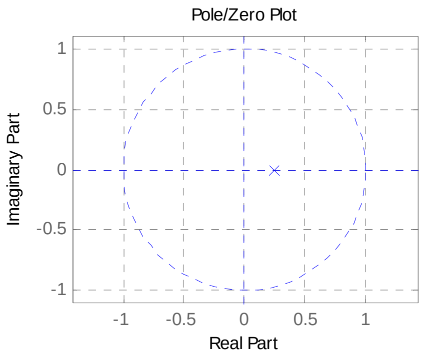
Opgave 2. (15%)
Hvis inputtet x[n] til et kausalt LTI system er en step funktion x[n]=u[n] og outputtet er

$$y[n] = u[n] - \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

2.a. Find H(z) og plot poler, nulpunkter og ROC for LTI systemet

$$Y(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} = \frac{1-\frac{1}{4}z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})} - \frac{(1-z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})}$$
$$= \frac{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)-(1-z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})} = \frac{\frac{3}{4}z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{3}{4}z^{-1}(1-z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})} = \frac{\frac{3}{4}z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})}$$



2.b. Find impulsresponsen h[n]

hint: $x[n-n_0] \leftrightarrow z^{-n_0}X(z)$
Altså hvis du ganger med z^{-n_0} i Z domænet svare det til det til en for skydning i tidsdomænet på $-n_0$

Ved tabel opslag fås: $h[n] = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}u[n-1]$

2.c. Er systemet stabilt?

Begge nedenstående svar bliver bedømt som rigtige:

- *Ja enhedscirkelen ligger i ROC*
- *Ja impuls responsen er absolut summerbar*

Opgave 3. (15%)
Et moving average filter er defineret ved

$$y[n] = 0.2\,x[n+2] + 0.2\,x[n+1] + 0.2\,x[n] + 0.2\,x[n-1] + 0.2\,x[n-2]$$

3.a Er filteret kausalt?

Nej, filteret afhænger af fremtidige værdier så som x[n+2].

hint: Geometriske række

$$\sum_{N_1}^{N_2} a^k = \frac{a^{N_1} - a^{N_2+1}}{1-a} \quad N_2 \geq N_1$$

3.b Find z-transformationen på rationel form (brøk form) H(z)

$$Y(z) = 0.2\,X(z)(z^2 + z^1 + z + z^{-1} + z^{-2})$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 0.2\,(z^2 + z^1 + z + z^{-1} + z^{-2})$$

$$H(z) = 0.2 \sum_{-2}^{2} z^{-k}$$

$$H(z) = 0.2 \frac{z^2 - z^{-3}}{1 - z^{-1}}$$

ELLER

$$H(z) = 0.2 \sum_{-2}^{2} z^{k}$$

$$H(z) = 0.2\,\frac{z^{-2} - z^3}{1 - z^1}$$

3.c. Find output-input (y[n]=……) relationen til det inverse system $H_i(z)$

$$H_i(z) = 5\,\frac{1 - z^{-1}}{z^2 - z^{-3}}$$

$$Y_i(z)(z^2 - z^{-3}) = X(z)(5\,(1 - z^{-1}))$$

$$y[n+2] - y[n-3] = 5\,x(n) - 5\,x(n-1)$$

Ovenstående kan også skrives som:

$$y[n+2] = 5\,x(n) - 5\,x(n-1) + y[n-3]$$

$$y[n] = 5\,x(n-2) - 5\,x(n-3) + y[n-5]$$

ELLER

$$H_i(z) = 5\,\frac{1 - z^1}{z^{-2} - z^3}$$

$$Y_i(z)(z^{-2} - z^3) = X(z)(5\,(1 - z^1))$$

$$y[n-2] - y[n+3] = 5\,x(n) - 5\,x(n+1)$$

Ovenstående kan også skrives som:

$$-y[n+3] = 5\,x(n) - 5\,x(n+1) - y[n-2]$$

$$y[n+3] = -5\,x(n) + 5\,x(n+1) + y[n-2]$$

$$y[n] = -5\,x(n-3) + 5\,x(n-2) + y[n-5]$$

Opgave 4. (15%)

En 4-bits analog til digital (AD) konverter skal konvertere nedenstående signal. Signalet er inden AD konvertering blevet forstærket 250 gange og har efterfølgende fået et offset på 2 V. Konverterens arbejdsområde er fra 0 til 10 volt.

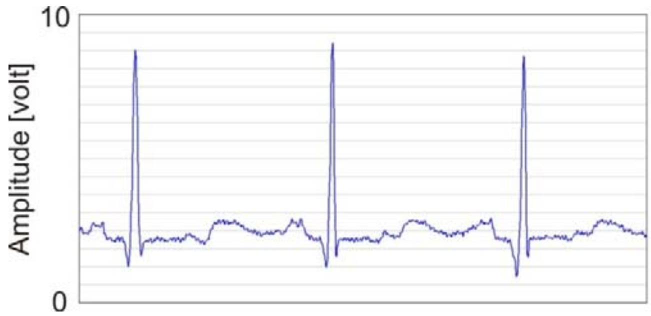


Fig. 6. Analogt signal efter forstærkning og offset.

4.a. Hvad er det maksimale ADC output (N_{ADC}, det heltal konverteren producerer) for signalsekvensen i figur 6?

Det ses af figuren, at signalet kommer op i næsthøjeste ADC output område. Svaret må altså være 14, da en 4-bits ADC max kan give 2^4-1=15.

4.b. Hvilket ADC output vil man få, hvis signalet inden forstærkningen var på 0 volt?

$$N_{ADC} = 2^n \frac{V_{in}}{V_{R+}} \qquad 2^4 \frac{2}{10} = 3.2$$

ELLER

$$N_{ADC} = (2^n - 1)\frac{V_{in}}{V_{R+}} \qquad (2^4 - 1)\frac{2}{10} = 3.0$$

Uanset om der anvendes afrunding eller nedrunding vil svaret være 3, hvilket også bekræftes af figuren. Den isoelektriske grundline i EKG signalet ligger i område 3 (der skal tælles områder nedefra og opad startende i 0)

4.c. Hvor mange bit skal der til, hvis man ønsker at have en opløsning på det oprindelige signal på mindst 0.1 mV?

Kravet til opløsning på det forstærkede signal må være 25 mV, da det oprindelige signal er blevet forstærket 250 gange (250 x 0.1mV = 25mV).

$$Q = \frac{arbejdsområde}{2^N}$$

$$2^N = \frac{arbejdsområde}{Q} = \frac{10V}{25mV} = 400 \quad \rightarrow \quad N = \frac{\log(400)}{\log(2)} = 8.64$$

Da N skal være et heltal, fås N = 9.

Opgave 5. (20%)

Complex functions:
Given the following function:
$f(z) = \frac{15z+9}{z^3-9z}$

5.a. Determine the zeros and singularities of f(z) and classify the singularities.
To find the zeros: $15z+9=0 \Rightarrow z=-9/15 \Rightarrow$ *The function has a zero at* $z=-3/5$
To find the poles: $z^3-9z = z(z^2-9) = 0 \Rightarrow$ *The function has poles at* $z=0$, $z=3$, *and* $z=-3$. *The 3 are single poles.*

5.b. Evaluate the real integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(15x+9)dx}{x^3-9x}$

The real function $\frac{15x+9}{x^3-9x}$ *has simple poles on the Real Axis, therefore we must use: pr.v.*
$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res} f(z) + \pi i \sum \operatorname{Res} f(z)$ *where the first sum corresponds to all the poles on the upper-half plane (none in this case) and the second sum corresponds to all the poles on the real axis (0, 3, and -3 in this case).*
To find the residues of f(z):

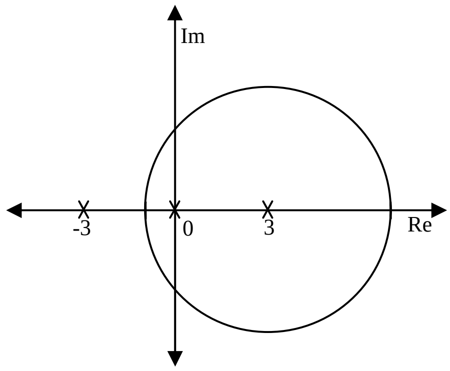
$$\operatorname{Res} f(z)\big|_{z=0} = z \cdot \frac{15z+9}{z(z^2-9)}\bigg|_{z=0} = \frac{9}{-9} = -1$$

$$\operatorname{Res} f(z)\big|_{z=3} = (z-3) \cdot \frac{15z+9}{z(z-3)(z+3)}\bigg|_{z=3} = \frac{54}{18} = 3$$

$$\operatorname{Res} f(z)\big|_{z=-3} = (z+3) \cdot \frac{15z+9}{z(z-3)(z+3)}\bigg|_{z=-3} = \frac{-36}{18} = -2$$

Therefore: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{15x+9}{x^3-9x} dx = \pi i(-1+3-2) = 0$

5.c. Evaluate *clockwise* $\oint_C f(z)dz$, $C: |z-3| = 4$
First we have to find which poles are inside C.



From the figure, we conclude that $z_0 = 0$ *and* $z_0 = 3$ *are in the circle; therefore and considering we have to integrate clockwise:*

$$\oint_C f(z)dz = -2\pi i\left[\operatorname{Res} f(z)\big|_{z=0} + \operatorname{Res} f(z)\big|_{z=3}\right] = -2\pi i(-1+3) = -4\pi i$$

Opgave 6. (20%)

Linear Algebra:
Given the following Quadratic form:
$Q = 14x_1^2 + 24x_1x_2 - 4\,x_2^2$

6.a. What curve does Q=0 represent? Reduce the quadratic form to principal axes and plot the curve you have found.

*First we find the symmetric coefficient matrix (**A**):*

$A = \begin{bmatrix} 14 & 12 \\ 12 & -4 \end{bmatrix}$ *and now we find the eigenvalues of **A** by solving* $\det(A - \lambda I) = 0$*:*

$$\begin{vmatrix} 14-\lambda & 12 \\ 12 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (14-\lambda)(-4-\lambda) - 144 = \lambda^2 - 10\lambda - 56 - 144 = \lambda^2 - 10\lambda - 200 = 0$$

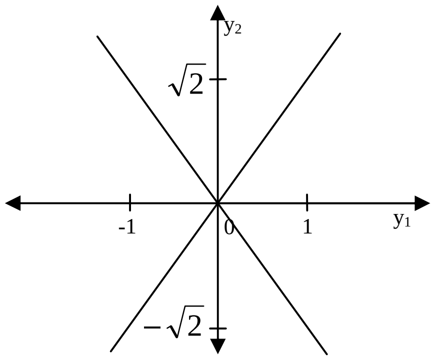
$$\lambda_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-(-800)}}{2} = \frac{10 \pm 30}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 20 \quad \text{and} \quad \lambda_2 = -10$$

Therefore, the quadratic form reduced to principal axis is:

$$Q = 20y_1^2 - 10y_2^2$$

To find out what curve it is when Q=0:

$20y_1^2 - 10y_2^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 20y_1^2 = 10y_2^2 \quad \Rightarrow \quad y_2 = \pm\sqrt{2}y_1$, *which are the equations of 2 straight lines crossing (0,0) and with slopes* $\sqrt{2}$ *and* $-\sqrt{2}$ *.*



6.b. What is the relation between the two coordinate systems (x_1, x_2) and (y_1, y_2)?
Express $\mathbf{x}^T = [x_1\ x_2]$ in terms of the new coordinate vector $\mathbf{y}^T = [y_1\ y_2]$

*The relation between the two coordinate systems is given by the matrix whose columns are normalized eigenvectors of **A**. Thus, we have to find first the eigenvectors of **A**:*
$(A - \lambda I)x = 0$

For $\lambda_1 = 20 \Rightarrow \begin{bmatrix} -6 & 12 \\ 12 & -24 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} -6x_1 + 12x_2 = 0 \\ 12x_1 - 24x_2 = 0 \end{matrix}$ *which has* $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
as a solution. The norm of this eigenvector is $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

For $\lambda_1 = -10 \Rightarrow \begin{bmatrix} 24 & 12 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 24x_1 + 12x_2 = 0 \\ 12x_1 + 6x_2 = 0 \end{matrix}$ *which has* $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$
as a solution. The norm of this eigenvector is $\sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$.

The relation is given then by the matrix: $\begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$

Finally, we can express $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ *in terms of the new coordinate system as:*

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

6.c. Diagonalize the symmetric coefficient matrix.
What is the spectrum of the diagonalized matrix?
Since we know the eigenvalues of the symmetric coefficient matrix, we can diagonalize it as:
$D = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}$*, the spectrum of this matrix is* $\{20, -10\}$.