Opgave 1. (10%)

Input-output relation er for et LTI system angivet ved følgende differensligning

$$y[n] + 2y[n-1] = x[n] + 2x[n-1] - 3x[n-2]$$

1.a. Er systemet kausalt?

Ja, outputtet er ikke afhængt af fremtidigt input.

Systemets input er x[n]=u[n] det vil sige

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

1.b. Beregn y[n] for n={0 1 2 3 4} givet at y=0 for n<0

$$y[n] + 2y[n-1] = x[n] + 2x[n-1] - 3x[n-2]$$

omskrives til

$$y[n] = x[n] + 2x[n-1] - 3x[n-2] - 2y[n-1]$$

derved bliver

$$y[0] = 1 + 2*0 - 3*0 - 2*0 = 1$$

$$y[1] = 1 + 2*1 - 3*0 - 2*1 = 1$$

$$y[2] = 1 + 2*1 - 3*1 - 2*1 = -2$$

$$y[3] = 1 + 2*1 - 3*1 - 2*(-2) = 4$$

$$y[4] = 1 + 2*1 - 3*1 - 2*(4) = 8$$

Opgave 2. (15%)

Impulsresponsen for et LTI system er givet ved

$$h[n] = 3\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

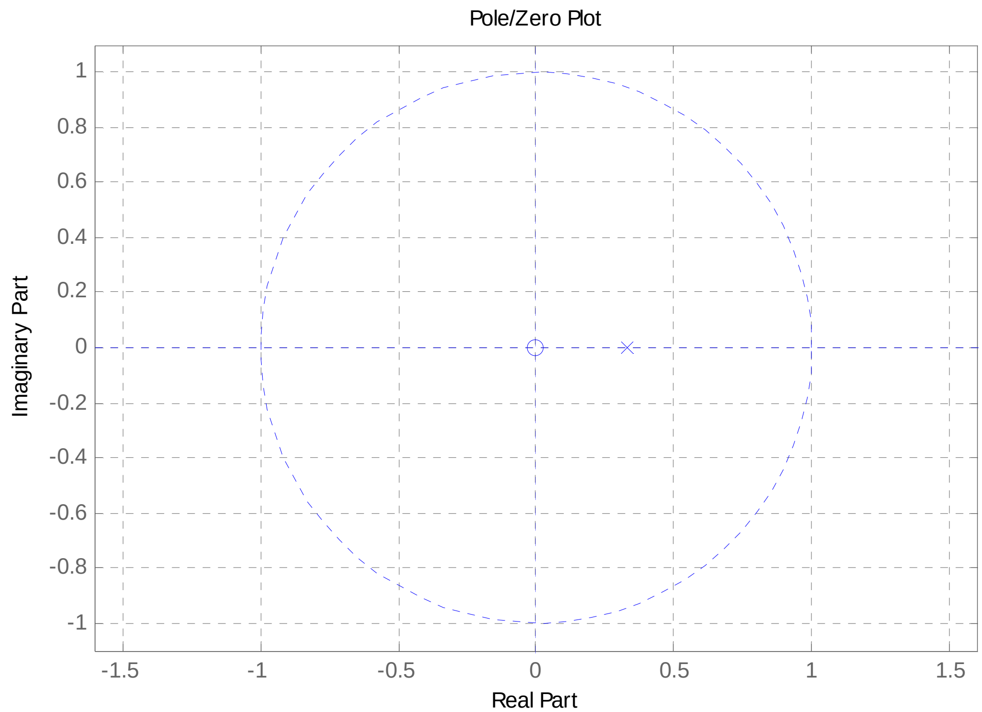
2.a. Bergen system funktionen H(z)

Ved tabel opslag fås

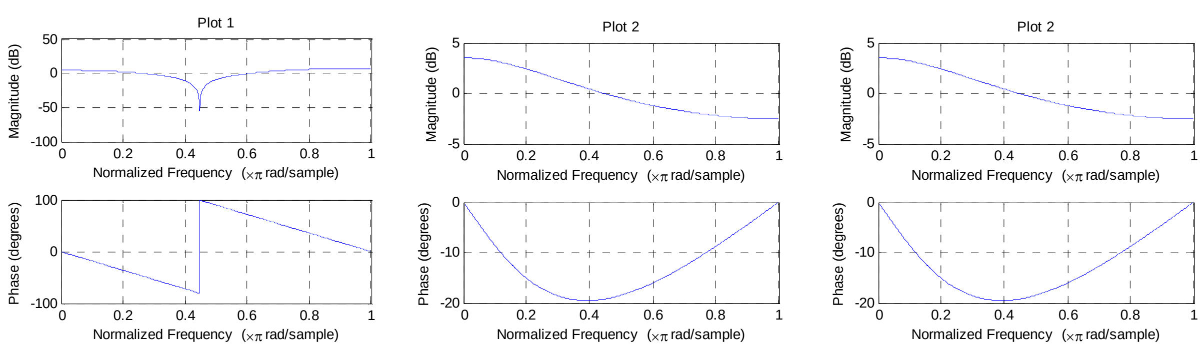
$$H(z) = \frac{3}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)z^{-1}}, \qquad ROC\ |z| > |a|$$

2.b. Skitser poler og nul punkter

Ingen nulpunkter udover origon, men en pol ved z=1/3



2.c. Hvilket af de 3 plots af Fourier transformationer stammer fra dette system? (begrund dit svar)



Plot 2, (som ved en fejl er plottet 2 gange)

Amplituden af Fourier Transformationer (FT) bestemmes af den inverse afstand til polen fra enhedscirkelen. På enhedscirkelen ved frekvensen =0 er afstanden lille mellem enhedscirkelen og polen, dermed stor FT amplitude hvor i mod afstanden er større ved frekvensen =pi hvilket forsager lav FT amplitude. Dette svare til plot 2, som er et lav pas filter. Se evt. side 258-267

Opgave 3. (25%)

Input output relation er for et LTI system angivet ved følgende differensligning

$$y[n] + \frac{3}{2}y[n-1] - y[n-1] = x[n]$$

3.a Bestem overførselsfunktionen H(z)

$$y[n] + \frac{3}{2}y[n-1] - y[n-1] = x[n]$$

$$\updownarrow$$

$$y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = x[n]$$

$$Y(z) + \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) = X(z)$$

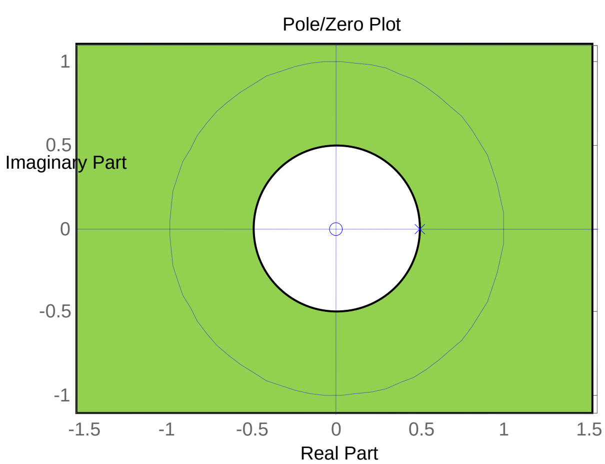
$$Y(z)\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right) = X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

3.b Find og skitser poler, nulpunkter og konvergensområdet

Ingen nulpunkter udover origon, men en pol ved z=1/2

Systemet er kausalt og derfor er funktionen højre-siddet, hvilket medfører at ROC >|1/2|



3.c Er systemet stabilt?

Ja, da enhedscirkelen ligger i ROC

3.d Bestem impulsresponsen for systemet

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)} = \frac{1}{\left(1 - \left(-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\right)}$$

Ved tabel opslag fås det at

$$h(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Opgave 4. (10%)

En analog til digital (AD) konverter med et arbejdsområde fra 0 til 10 volt skal bruges til at optage et signal med en opløsning på 1 mV.

4.a. Hvor mange bit skal AD konverteren som minimum anvende for at klare dette krav? (vis beregningsmetode)

Generelt: $Q = \frac{arbejdsområde}{2^N}$, Q *er opløsning i volt per ADC trin og* N *er antallet af bit*

Specifikt for denne opgave:

$$Q > \frac{arbejdsområde}{2^N}$$

$$2^N > \frac{arbejdsområde}{Q}$$

$$\log(2^N) > \log\left(\frac{arbejdsområde}{Q}\right)$$

$$\mathrm{N} > \frac{\log\left(\frac{arbejdsområde}{Q}\right)}{\log(2)}$$

$$\mathrm{N} > \frac{\log\left(\frac{10}{0.001}\right)}{\log(2)}$$

$$\mathrm{N} > 13.29$$

Der skal altså en 14 bits ADC til at klare denne opgave (da N skal være et heltal).

Kontrol:

$$Q = \frac{arbejdsområde}{2^N} = \frac{10V}{2^{14}} = 0.6mV$$

Med 14 bit fås en opløsning bedre end 1 mV. Med 13 bit ville Q blive 1.2 mV og kravet om en opløsning på 1 mV ville dermed ikke kunne opfyldes.

4.b. AD konverteren leverer én konvertering for hver 50 µs. Hvad er Nyquist frekvensen for denne konverter?

$$T_s = \frac{1}{F_s} \qquad \text{og} \qquad F_{Nyquist} = \frac{F_s}{2}$$

$$F_{Nyquist} = \frac{1}{2 * T_s} \quad \Rightarrow \quad F_{Nyquist} = \frac{1}{2 * 50\ \mu s} = 10\ kHz$$

4.c. Hvor lang tid skal der måles på et signal med overstående konverter, før man ved hjælp af en DFT kan udtale sig om frekvensindholdet ved både 75 og 100 Hz?

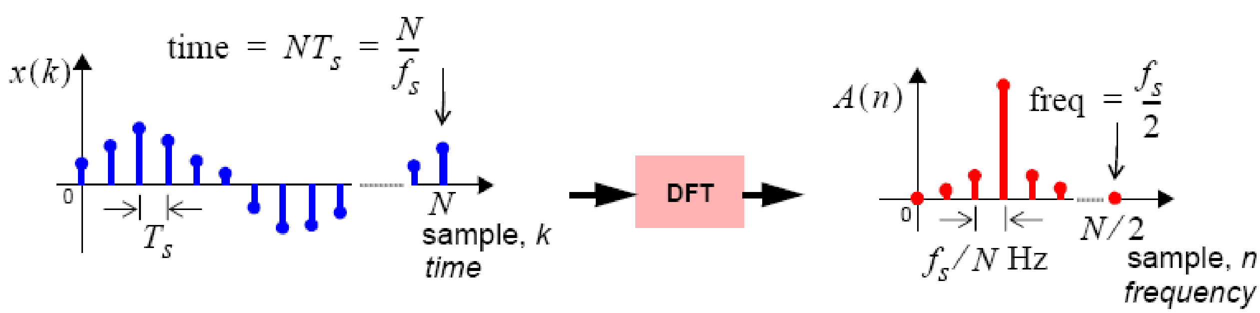
$$frequency\ bin\ width = \frac{F_s}{N}, \qquad N\ er\ antallet\ af\ samples$$

$$\Rightarrow \quad \frac{F_s}{N} = 100\ Hz - 75\ Hz$$

$$\Rightarrow \quad N = \frac{F_s}{25\ Hz} = \frac{20\ kHz}{25\ Hz} = 800$$

$$\text{time} = N * T_s = 800 * 50\ \mu s = 40\ ms$$

Der skal altså måles i 40 ms før en DFT kan skelne mellem 75 og 100 Hz.



DFT of N data points to N/2 frequency points. The frequency bin width is shown as f_s/N.

Opgave 5. (20%)

Complex functions:
Given the following function:

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)}$$

5.a. Determine the zeros and singularities of f(z) and classify the singularities.

5.b. Evaluate counterclockwise (mod uret) $\oint_C f(z)dz$, $C: |z-i| = 1$

5.c. Evaluate the real integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$

Opgave 6. (20%)

Linear Algebra:
Given the following Quadratic form:
$Q = 3x_1^2 - 4x_1x_2$

(Show all relevant intermediate results – that means **no** calculator-only type of answers)

6.a. Find a symmetric matrix **A** for which:
$Q = \mathbf{x}^T \mathbf{A}\, \mathbf{x}$ with $\mathbf{x}^T = [x_1\ x_2]$

6.b. What curve does Q=100 represent? Transform it to principal axes.

6.c. What is the relation between the two coordinate systems (x_1, x_2) and (y_1, y_2)?
Express $\mathbf{x}^T = [x_1\ x_2]$ in terms of the new coordinate vector $\mathbf{y}^T = [y_1\ y_2]$

6.d. Diagonalize **A**.

PRØVEEKSAMEN Nr. 1

Opgave 5.

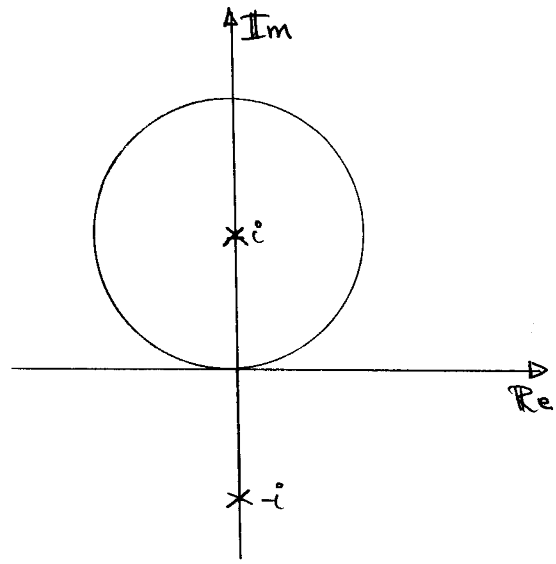
5.a. – The function has no zeros

– Singularities:

$z^2+1=0 \rightarrow$ Simple poles at $z_0=i$ and $z_0=-i$

$z^2+9=0 \Rightarrow$ Simple poles at $z_0=3i$ and $z_0=-3i$

5.b. $\oint_C f(z)\,dz \qquad C: |z-i|=1$



→ Integrate counterclockwise

We calculate the residue at $z_0=i$ using:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0)\, f(z)$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i} \cancel{(z-i)} \cdot \frac{1}{(z+i)\cancel{(z-i)}(z^2+9)} =$$

$$= \lim_{z\to i} \frac{1}{(z+i)(z^2+9)} = \frac{1}{2i\,(-1+9)} = \frac{1}{16i}$$

Then, $\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \cancel{2}\pi \cancel{i} \cdot \frac{1}{\cancel{16}_{8}\cancel{i}} \Rightarrow \boxed{\oint_C f(z)\,dz = \frac{\pi}{8} \qquad C: |z-i|=1}$

5.c. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$

We use: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \underbrace{\sum \operatorname{Res} f(z)}$

all the residues of $f(z)$ at the poles of $f(z)$ in the upper half-plane $\Rightarrow z_0=i$ & $z_0=3i$

$$\operatorname*{Res}_{z=3i} f(z) = \lim_{z\to 3i} \cancel{(z-3i)} \frac{1}{(z^2+1)\,(z+3i)\cancel{(z-3i)}} =$$

$$\operatorname*{Res}_{z=3i} f(z) = \lim_{z\to 3i} \frac{1}{(z^2+1)\ (z+3i)} = \frac{1}{(-9+1)\ (3i+3i)} = \frac{-1}{48i}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z_0=i} f(z) + \operatorname*{Res}_{z_0=3i} f(z) \right)$$

$$= \cancel{2}\pi \cancel{i} \left(\frac{1}{\underset{8}{\cancel{16i}}} - \frac{1}{\underset{24}{\cancel{48i}}} \right) = \pi \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{24} \right) = \pi \left(\frac{3-1}{24} \right) = \frac{\pi}{12}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{\pi}{12}}$$

Opgave 6.

$$Q = 3x_1^2 - 4x_1x_2$$

6.a. The symmetric coefficients matrix is:

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}}$$

6.b. First, we have to find the eigenvalues of A

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(3-\lambda) - 4 = -3\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4(-4)}}{2} = \frac{3\pm 5}{2} \quad \begin{array}{l} \nearrow \lambda_1 = 4 \\ \searrow \lambda_2 = -1 \end{array}$$

Therefore, the transformed form is:

$$4y_1^2 - y_2^2 = 100$$

$$\frac{y_1^2}{25} - \frac{y_2^2}{100} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{y_1^2}{5^2} - \frac{y_2^2}{10^2} = 1}$$

This is a hyperbola

6.c. The matrix X whose columns are normalized eigenvectors of A (the symmetric coefficients matrix) gives the relation between $\bar{x}$ & $\bar{y}$.

Thus, we have to find the eigenvectors of A.

$$(A - \lambda I)\bar{x} = \bar{0}$$

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & -\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

→ For $\lambda_1 = 4$

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -x_1 - 2x_2 = 0 \quad (1) \\ -2x_1 - 4x_2 = 0 \quad (2) \end{matrix}\right\} \text{From } (1): \; x_1 = -2x_2 \quad (3)$$

Replacing (3) into (2): $-4x_2 - 4x_2 = 0 \Rightarrow x_2$ may take any value

$$\begin{matrix} x_2 = 1 \\ x_1 = -2 \end{matrix} \Rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{norm of } \bar{x} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

→ For $\lambda_2 = -1$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 4x_1 - 2x_2 = 0 \quad (1) \\ -2x_1 + x_2 = 0 \quad (2) \end{matrix}\right\} \text{From } (2): \; x_2 = 2x_1 \quad (3)$$

Replacing (3) into (1): $4x_1 - 4x_1 = 0 \Rightarrow x_1$ may take any value

$$\begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{matrix} \Rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \text{norm of } \bar{x} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

Thus, the relation between the two coordinate systems is:

$$\boxed{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}}$$

6.d. Using theorem 4 (side 351) : $\mathbb{D} = \mathbb{X}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{X}$ and since we know the eigenvalues of $\mathbb{A}$:

$$\boxed{\mathbb{D} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}$$